บทที่ 1

เมทริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น

Matrices and System of Linear Equations

1.1 เมทริกซ์และการดำเนินการ

1.1.1 ความหมายของเมทริกซ์

เมทริกซ์ (matrix) คือ กลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และบรรจุภายในเครื่องหมาย [ ] เขียนในรูปทั่วไป ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ หรือ } \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

ในบางตำราอาจใช้เครื่องหมายที่แตกต่างออกไป เช่น ( ) แทน [ ] เป็นต้น

- เรียก a_{ij} ว่า ***สมาชิก*** (element หรือ entry) ในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A
- เมทริกซ์ A มี m แถว และ n หลัก จะกล่าวว่า เมทริกซ์ A มี ***อันดับ*** (order) $m \times n$
- จะเรียกสมาชิก a_{ii} โดยที่ $i = 1,2,3,\ldots,k = \min\{m,n\}$ ว่า ***สมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก*** (main diagonal entries) ของเมทริกซ์ A
- เรียก เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

  เมื่อ $j = 1,2,3,\ldots,n$ ซึ่งมีอันดับเป็น $m \times 1$ ว่า ***เมทริกซ์หลัก*** (column matrix) ของเมทริกซ์ A
- เรียก เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

  เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots,m$ ซึ่งมีอันดับเป็น $1 \times n$ ว่า ***เมทริกซ์แถว*** (row matrix) ของเมทริกซ์ A

ตัวอย่าง 1.1.1 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 7 & -2 & 12 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์หลักของเมทริกซ์ A มีดังนี้

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์แถวของเมทริกซ์ A มีดังนี้

$$[5 \quad 3 \quad -5], \qquad [0 \quad 9 \quad 4], \qquad [7 \quad -2 \quad 12], \qquad [1 \quad -4 \quad 8]$$

มี $a_{11} = 5$ $a_{22} = 9$ และ $a_{33} = 12$ เป็นสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ A

1.1.2 เมทริกซ์แบบต่างๆ

เมทริกซ์ศูนย์ (zero or null matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{0}$ ถ้าต้องการเจาะจงเมทริกซ์ศูนย์ที่มีอันดับเป็น $m \times n$ จะเขียนแทนด้วย $\bar{0}_{m\times n}$ เช่น

$$\bar{0} = \bar{0}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนของแถวเท่ากับจำนวนของหลัก ถ้าเมทริกซ์จัตุรัสมี n แถว จะเรียกว่า ***เมทริกซ์จัตุรัสอันดับ*** n (square matrix of order n) เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 49 & 12 & 0 \\ 0.1 & 9 & -0.6 & -5 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกใต้เส้นแนวทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทุกตัว เช่น

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ ถ้า $i > j$ แล้ว $a_{ij} = 0$ $(a_{21} = a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0)$

เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเหนือเส้นแนวทแยงมุมหลักเท่ากับ 0 ทุกตัว เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ ถ้า $\mathrm{i} < \mathrm{j}$ แล้ว $a_{ij} = 0 (a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0)$

เมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่เป็นทั้ง เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน และ เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ ถ้า $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ แล้ว $a_{ij} = 0$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity or unit matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักเป็นหนึ่งทุกตัว เราจะใช้ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ n เช่น

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัส $[a_{ij}]_{n\times n}$ โดยที่ $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุกค่า $i, j \in \{1,2,3, \dots, n\}$ เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -4 \\ 6 & 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

1.1.3 การดำเนินการบนเมทริกซ์ (Matrix operations)

บทนิยาม 1.1.1 ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\dots,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,\dots,n\}$

และเขียน $A = B$ แทน A เท่ากับ B

บทนิยาม 1.1.2 ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. การบวก ลบ เมทริกซ์ และการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

   1.1 $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

   1.2 $cA = [ca_{ij}]_{m\times n}$

   1.3 $A - B = A + (-1)B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$

2. ***เมทริกซ์สลับเปลี่ยน*** ของเมทริกซ์ A (transpose of a matrix A) นิยามโดย

   $A^T = [c_{ij}]_{n\times m}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุก $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$ และ $j \in \{1,2,3,\dots,m\}$

ตัวอย่าง 1.1.2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} w & 1 & 2 & y \\ y & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **และ** $B = \begin{bmatrix} z & 1 & 2v & w \\ x & u & 3 & z \end{bmatrix}$

ถ้า $A - B = \bar{0}_{2\times 4}$ แล้ว u, v, w, x, y, z มีค่าเท่าไร

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 1.1.1 กำหนดให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์อันดับ $m \times n$ และ c, d เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $A \pm B$ และ cA มีอันดับ $m \times n$
2. $A + B = B + A$
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$
4. $A + \bar{0}_{m\times n} = A$
5. สำหรับทุกเมทริกซ์ A ที่มีอันดับ $m \times n$ จะมีเมทริกซ์ B ที่มีอันดับ $m \times n$ ที่ทำให้

$$A + B = \bar{0}_{m\times n}$$

   เราจะเรียกเมทริกซ์ B ว่า ***อินเวอร์สการบวก*** ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $B = -A$

6. $-A = (-1)A$ และ $(cd)A = c(dA)$
7. $c(A + B) = cA + cB$
8. $(c + d)A = cA + dA$
9. $0A = \bar{0}_{m\times n}$ และ $1A = A$

ตัวอย่าง 1.1.3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **และ** $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -4 & 6 \\ 1/2 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

(i) จงหา $A + B$

วิธีทำ

(ii) จงหา $5A - 2B$

วิธีทำ

(iii) จงหา $A^T + B^T$

วิธีทำ

(iv) จงหา $(A+B)^T$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 1.1.2 ให้ A, B เป็นเมทริกซ์อันดับ $m \times n$ และ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $(A^T)^T = A$ และ $(aA)^T = aA^T$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$

บทนิยาม 1.1.2 ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย

$$AB = [c_{ij}]_{m\times p}$$

โดยที่ $c_{ij} =$ ผลคูณของเมทริกซ์แถวที่ i ของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์หลักที่ j ของเมทริกซ์ B นั่นคือ

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

สำหรับทุก $i = 1,2,3,\ldots,m$ และ $j = 1,2,3,\ldots,p$

ตัวอย่าง 1.1.4 กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **และ** $D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

(i) จงหา CD

วิธีทำ

(ii) จงหา DC

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.1.5 กำหนดให้ $A = [3 \quad 1 \quad -2 \quad 7]$ **และ** $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(i) จงหา AB

วิธีทำ $AB = [(3)(2) + (1)(0) + (-2)(1) + (7)(3)] = [25]$

(ii) จงหา BA

วิธีทำ

$$BA = \begin{bmatrix} (2)(3) & (2)(1) & (2)(-2) & (2)(7) \\ (0)(3) & (0)(1) & (0)(-2) & (0)(7) \\ (1)(3) & (1)(1) & (1)(-2) & (1)(7) \\ (3)(3) & (3)(1) & (3)(-2) & (3)(7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 9 & 3 & -6 & 21 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.1.3 กำหนดให้ A, B, C, D เป็นเมทริกซ์ จะได้ว่า

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)D = BD + CD$

1.2 ตัวผกผันของเมทริกซ์ (Inverse of matrix)

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n และ $\mathrm{I_n}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ จะได้ว่า

$$\mathrm{AI_n = I_nA = A}$$

และจะเรียก เมทริกซ์ $\mathrm{I_n}$ ว่าเป็น***เอกลักษณ์การคูณ*** (multiplicative identity)

บทนิยาม 1.2.1

1. สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A อันดับ n ใดๆ ถ้ามีเมทริกซ์ B ซึ่งทำให้ผลคูณ $\mathrm{AB = BA = I_n}$ แล้วจะเรียก B ว่า ***ตัวผกผัน*** (inverse) ของเมทริกซ์ A
2. ถ้าเมทริกซ์ A มีตัวผกผัน จะเรียก A ว่า ***เมทริกซ์ไม่เอกฐาน*** (non-singular matrix) และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{A^{-1}}$ แทนตัวผกผันของเมทริกซ์ A นั่นคือ $\mathrm{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$
3. ถ้าเมทริกซ์ A ไม่มีตัวผกผัน จะเรียก A ว่า ***เมทริกซ์เอกฐาน*** (singular matrix)

1.2.1 การหาตัวผกผันของเมทริกซ์อันดับ 2×2

ในการหาตัวผกผันของเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ 2 นั้น เราได้ศึกษามาแล้วในระดับมัธยมศึกษา ซึ่งมีวิธีการหาตัวผกผันที่ไม่ซับซ้อนมาก พิจารณาได้จาก

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $ad - bc \neq 0$ แล้ว A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และตัวผกผันของเมทริกซ์ A คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. ถ้า $ad - bc = 0$ แล้ว A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

ตัวอย่าง 1.2.1 **จงหา** A^{-1} โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.2.2 จงหา A^{-1} โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

บทประยุกต์หนึ่งที่สำคัญของเมทริกซ์คือการประยุกต์ใช้เมทริกซ์ผกผันกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่ง ณ ที่นี้จะพิจารณาระบบสมการเชิงเส้นอย่างง่าย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.3 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$2x + 3y = 12$$
$$4x + 7y = 20$$

วิธีทำ

1.3 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

1.3.1 ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์

ในเรื่องของเมทริกซ์ เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันที่ส่งจากเซตของเมทริกซ์จัตุรัสซึ่งสมาชิกเป็นจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง ที่เรียกว่า ***ดีเทอร์มิแนนต์*** (determinant)

กำหนดให้ $\mathbb{M} =$ เซตของเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า ดีเทอร์มิแนนต์ก็คือ ฟังก์ชัน $\det(\cdot) : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ หรือ $|\cdot| : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ ซึ่งจะพิจารณาได้ดังต่อไปนี้

กรณีที่เมทริกซ์จัตุรัสมีอันดับ $n = 1$ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จะกำหนดให้เป็นสมาชิกของเมทริกซ์นั้น เช่น $\det[0] = 0, \det[5] = 5, \det[-2.4] = -2.4$ เป็นต้น

กรณีที่เมทริกซ์จัตุรัสมีอันดับ $n \geq 2$ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จะกำหนดโดยการอาศัยการจัดลำดับเข้ามาช่วย และจะเขียนลดรูปเช่น

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\right| = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งการคำนวณดีเทอร์มิแนนต์จะกล่าวต่อไปจากนี้

ให้ S_n แทน เซตการจัดลำดับของตัวเลขตั้งแต่ 1 ถึง n จะได้ว่า

$$S_2 = \{12,21\}$$
$$S_3 = \{123,132,213,231,312,321\}$$

ตัวอย่าง 1.3.1 จงหา S_4

วิธีทำ

$$S = \{1234,1243,1324,1342,1423,1432,2134,2143,2314,1341,2413,2431,3124,3142,$$
$$3214,3241,3412,3421,4123,4132,4213,4231,4312,4321\}$$

บทนิยาม 1.3.1 จะกล่าวว่า J_i ในการจัดลำดับ $J_1J_2\cdots J_n \in S_n$ มี k ***การผกผัน*** (inversion) ถ้า

$$k = \#\{J_m : J_m < j_i, m > i\}$$

หมายเหตุ กำหนดสัญลักษณ์ $\#A =$ จำนวนสมาชิกของเซต A เมื่อ A เป็นเซตจำกัด

ตัวอย่าง 1.3.2 พิจารณา S_3

ให้ $J_1J_2J_3 = 231$ จะได้ $J_1 = 2, J_2 = 3, J_3 = 1$ จะได้ว่า

จำนวนการผกผันของ $J_1 = 2$ เท่ากับ $\#\{J_m : J_m < 2, m > 1\} = \#\{1\} = 1$

จำนวนการผกผันของ $J_2 = 3$ เท่ากับ $\#\{J_m : J_m < 3, m > 2\} = \#\{1\} = 1$

จำนวนการผกผันของ $J_3 = 1$ เท่ากับ $\#\{J_m : J_m < 1, m > 3\} = \#\{\ \} = 0$

ให้ $J_1J_2J_3 = 321$ จะได้ $J_1 = 3, J_2 = 2, J_3 = 1$ จะได้ว่า

จำนวนการผกผันของ $J_1 = 3$ เท่ากับ $\#\{J_m : J_m < 3, m > 1\} = \#\{2,1\} = 2$

จำนวนการผกผันของ $J_2 = 2$ เท่ากับ $\#\{J_m : J_m < 2, m > 2\} = \#\{1\} = 1$

จำนวนการผกผันของ $J_3 = 1$ เท่ากับ $\#\{J_m : J_m < 1, m > 3\} = \#\{\ \} = 0$

สรุปเป็นตารางได้ดังนี้

จำนวนที่นำมาพิจารณา	จำนวนการผกผันของการจัดลำดับ					
	123	132	213	231	312	321
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	1
3	0	1	0	1	2	2
จำนวนการผกผันทั้งหมด	0	1	1	2	2	3

บทนิยาม 1.3.2 จะเรียกการจัดลำดับใน S_n ซึ่งมีจำนวนการผกผันทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ว่า **การจัดลำดับคู่** และจะเรียกการจัดลำดับซึ่งมีจำนวนการผกผันทั้งหมดเป็นจำนวนคี่ว่า **การจัดลำดับคี่**

จากตัวอย่าง 1.3.2

- การจัดลำดับ $123, 231, 312$ เรียกว่า ***การจัดลำดับคู่*** (จำนวนการผกผันทั้งหมดเป็นจำนวนเต็มคู่)
- การจัดลำดับ $132, 213, 321$ เรียกว่า ***การจัดลำดับคี่*** (จำนวนการผกผันทั้งหมดเป็นจำนวนเต็มคี่)

บทนิยาม 1.3.3 ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ และ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ นิยามโดย

$$\det A = \sum_{J_1J_2\cdots J_n \in S_n} (-1)^{\lambda(J_1J_2\cdots J_n)} a_{1J_1} \cdot a_{2J_2} \cdot \ldots \cdot a_{nJ_n}$$

เมื่อ

$$\lambda(J_1J_2\cdots J_n) = \text{จำนวนการผกผันทั้งหมดของ } J_1J_2\cdots J_n$$

จาก บทนิยาม 1.3.3 จะได้ว่า สำหรับการบวก (ภายใต้เครื่องหมาย $\sum$) จะบวกเทอม $a_{1J_1} \cdot a_{2J_2} \cdot \ldots \cdot a_{nJ_n}$ ทั้งหมด $n!$ เทอมด้วยกัน และ จะได้สูตรการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 2 และ 3 ได้ดังนี้

กรณีเมทริกซ์จัตุรัสอันดับสอง

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

พิจารณาตาราง

จำนวนที่นำมาพิจารณา ↓	**จำนวนการผกผันของการจัดลำดับ**	
	$J_1J_2 = 12$	$J_1J_2 = 21$
1	0	0
2	0	1
เครื่องหมาย	$\lambda(12) = 0$	$\lambda(21) = 1$
	$(-1)^{\lambda(12)} = 1$	$(-1)^{\lambda(21)} = -1$

ดังนั้น

$$\det A = (-1)^{\lambda(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{\lambda(21)}a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหา $\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = (2)(7) - (3)(4) = 2$

กรณีเมทริกซ์จัตุรัสอันดับสาม

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

พิจารณาตาราง

จำนวนที่นำมาพิจารณา↓	จำนวนการผกผันของการจัดลำดับ					
	123	132	213	231	312	321
$\lambda(J_1J_2J_3)$	0	1	1	2	2	3
	$(-1)^0 = 1$	$(-1)^1 = -1$	$(-1)^1 = -1$	$(-1)^2 = 1$	$(-1)^2 = 1$	$(-1)^3 = -1$
เครื่องหมาย	+	-	-	+	+	-

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})\end{aligned}$$

อธิบายเป็นแผนภาพดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} & a_{21} & \square \\ \square & \square & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \square & \square & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ \square & a_{22} & a_{23} & a_{21} & \square \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \square & \square \end{array}$$

ซึ่งเป็นที่มาของการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์อันดับ 3×3 โดยใช้วิธีการต่อหลัก ซึ่งวิธีนี้ใช้ได้กับเมทริกซ์อันดับ 3×3 เท่านั้น

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

ตัวอย่าง 1.3.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $\det A$

วิธีทำ

1.3.2 สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

กำหนดให้ A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n จะได้ว่า

1. ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง หรือ หลักใดหลักหนึ่ง ของ A เป็นศูนย์หมดทุกตัวแล้ว $\det A = 0$
2. $\det A = \det\ (A^T)$
3. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการสลับสองแถวใดๆ หรือ การสลับสองหลักใดๆ ของเมทริกซ์ A

   แล้ว $\det B = -\det A$
4. ถ้าสมาชิกในสองแถว หรือ สองหลัก ใดๆ ของเมทริกซ์ A เหมือนกัน แล้ว $\det A = 0$
5. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการคูณแถวใดแถวหนึ่ง หรือ หลักใดหลักหนึ่งของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k

   แล้ว $\det B = k \det A$

6. ค่าของดีเทอร์มิแนนต์จะไม่เปลี่ยนแปลง ถ้านำ k เท่าของแถวที่ r ไปบวกกับแถวที่ s ของเมทริกซ์ (หรือ นำ k เท่าของหลักที่ r ไปบวกกับหลักที่ s ของเมทริกซ์)
7. ค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน หรือ เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง จะเท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์
8. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
9. $\det(kA) = k^n \det A$

ตัวอย่าง 1.3.5 พิจารณาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\det A = 0$

ใช้สมบัติข้อ 1

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det A = 0$$
$$\det B = 0$$

ใช้สมบัติข้อ 4

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det B = -\det A$$
$$\det C = -\det A$$

ใช้สมบัติข้อ 3

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A = \det A^T$$

ใช้สมบัติข้อ 2

5. $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det B = 2\det A$$
$$\det C = 3\det A$$

ใช้สมบัติข้อ 5

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det A &= \det B \\ &= \det C \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 9 \end{aligned}$$

ใช้สมบัติข้อ 7

จากสมบัติดังที่ได้กล่าวมา สามารถประยุกต์เพื่อหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.3.6 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.3.7 จงหา $\det A$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 99 & 0 & 198 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

1.4 การดำเนินการตามแถวมูลฐาน

1.4.1 การดำเนินการตามแถวมูลฐาน

การดำเนินการตามแถวมูลฐาน คือ การดำเนินการอีกรูปแบบหนึ่งของเมทริกซ์ ซึ่งในหัวข้อนี้จะนำไปใช้ประโยชน์ในการคำนวณหาเมทริกซ์ผกผัน และการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นในหัวข้อถัดไป

บทนิยาม 1.4.1 ***การดำเนินการตามแถวมูลฐาน*** (elementary row operation) ของเมทริกซ์ คือ การดำเนินการแบบใดแบบหนึ่ง ใน 3 แบบต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างแถวที่ i และ j (ใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{R_i \Leftrightarrow R_j}$)
2. การนำค่าคงตัว k ที่ไม่เท่ากับศูนย์คูณแถวที่ i (ใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{kR_i \Rightarrow R_i}$)
3. การนำค่าคงตัว k ที่ไม่เท่ากับศูนย์คูณแถวที่ i แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j โดยที่ $\mathrm{i \neq j}$ (ใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{R_j + kR_i \Rightarrow R_j}$)

การดำเนินการตามแถวที่กล่าวต่อไปตลอดทั้งเอกสาร เราพิจารณาเฉพาะการดำเนินการตามแถวมูลฐานเท่านั้น ดังนั้นเพื่อความสะดวกจะเรียก การดำเนินการตามแถว แทน การดำเนินการตามแถวมูลฐาน

ตัวอย่าง 1.4.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า C และ D เป็นเมทริกซ์ซึ่งได้จากการดำเนินการตามแถวของเมทริกซ์ A โดย $-2\mathrm{R_2} \Rightarrow \mathrm{R_2}$ และ $\mathrm{R_2 + 3R_1} \Rightarrow \mathrm{R_2}$ ตามลำดับ จงหาเมทริกซ์ C และ D

วิธีทำ

บทนิยาม 1.4.2 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์อันดับ $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ จะกล่าวว่า เมทริกซ์ A ***สมมูลตามแถว*** (row equivalent) กับเมทริกซ์ B ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ A ต่อเนื่องกันจำนวน k ครั้ง จะใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$

จากตัวอย่าง 1.4.1 จะได้ว่า เมทริกซ์ A สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ C และ D นั่นคือ $\mathrm{A} \sim \mathrm{C}$ และ $\mathrm{A} \sim \mathrm{D}$

บทนิยาม 1.4.3 ***เมทริกซ์มูลฐาน*** (elementary matrix) คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการตามแถวของเมทริกซ์เอกลักษณ์เพียงครั้งเดียว

ตัวอย่าง 1.4.2 จงสร้างเมทริกซ์มูลฐานจากเมทริกซ์เอกลักษณ์ $\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ มาอย่างน้อย 3 เมทริกซ์

วิธีทำ การดำเนินการตามแถวของเมทริกซ์ I_3 โดย $\mathrm{R}_1 \Leftrightarrow \mathrm{R}_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

การดำเนินการตามแถวของเมทริกซ์ I_3 โดย $\mathrm{R}_2 + 3\mathrm{R}_1 \Rightarrow \mathrm{R}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การดำเนินการตามแถวของเมทริกซ์ I_3 โดย $2\mathrm{R}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.4.1 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์อันดับ $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ และ B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ A หนึ่งครั้ง ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์มูลฐาน E ที่ได้จากการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ $\mathrm{I_m}$ แบบเดียวกันกับการดำเนินการบนเมทริกซ์ A ที่ทำให้ $\mathrm{B} = \mathrm{EA}$

ตัวอย่าง 1.4.3 กำหนดให้ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ถ้า $\mathrm{E_1}, \mathrm{E_2}$ และ $\mathrm{E_3}$ เกิดจากการดำเนินการตามแถวของ $\mathrm{I_3}$ โดย $\mathrm{R_1} \Leftrightarrow \mathrm{R_3}$ และ $\mathrm{R_2} + 3\mathrm{R_1} \Longrightarrow \mathrm{R_2}$ และ $2\mathrm{R_2}$ ตามลำดับ

1) จงหา $\mathrm{E_1A}, \mathrm{E_2A}, \mathrm{E_3A}$
2) จงหาเมทริกซ์ซึ่งได้จากการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ A
   โดย $\mathrm{R_1} \Leftrightarrow \mathrm{R_3}$, $\mathrm{R_2} + 3\mathrm{R_1} \Longrightarrow \mathrm{R_2}$ และ $2\mathrm{R_2}$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 1.4.2 จะได้ว่า

$$\mathrm{E_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{E_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\mathrm{E_1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E_2A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 17 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E_3A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ซึ่งได้จากการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ A

โดย $\mathrm{R_1} \Leftrightarrow \mathrm{R_3}$, $\mathrm{R_2} + 3\mathrm{R_1} \Longrightarrow \mathrm{R_2}$ และ $2\mathrm{R_2}$ คือ

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 17 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ ตามลำดับ}$$

ทฤษฎีบท 1.4.2 กำหนดให้เมทริกซ์ A และ B มีอันดับ $m \times n$ จะได้ว่าเมทริกซ์ A สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ $B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$ เมื่อ $E_1, E_2, \dots, E_{k-1}, E_k$ เป็นเมทริกซ์มูลฐาน

ทฤษฎีบท 1.4.3 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n
A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ A สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n

หมายเหตุ

1) เมทริกซ์มูลฐานทุกเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (เมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้)

2) ให้ A สมมูลตามแถวกับ I_n นั่นคือ

$$I_n = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$

โดยที่ $E_1, E_2, \dots, E_k$ เป็นเมทริกซ์มูลฐาน ดังนั้น

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I_n$$

นั่นคือ I_n สมมูลตามแถวกับ A^{-1}

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n ถ้าใช้การดำเนินการตามแถวมูลฐานบนเมทริกซ์ A จนได้ I_n และใช้วิธีดำเนินการแบบเดียวกันกับเมทริกซ์ I_n ก็จะได้ผลลัพธ์เป็น A^{-1} ดังนั้นถ้านำเมทริกซ์ A และ I_n มาสร้างเป็นเมทริกซ์ใหม่ $[A : I_n]$ และใช้การดำเนินการตามแถวมูลฐานบนเมทริกซ์ $[A : I_n]$ จนได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ $[I_n : B]$

$$[A : I_n] \sim \cdots \sim [I_n : B]$$

พิจารณาเหตุผลได้จากตารางต่อไปนี้

$A \sim B_1$	$B_1 = E_1 A$	$I_n \sim E_1$	$[A : I_n] \sim [B_1 : E_1]$
$B_1 \sim B_2$	$B_2 = E_2 B_1 = E_2 E_1 A$	$I_n \sim E_2 E_1$	$[B_1 : E_1] \sim [B_2 : E_2 E_1]$
$B_2 \sim B_3$	$B_3 = E_3 B_2 = E_3 E_2 E_1 A$	$I_n \sim E_3 E_2 E_1$	$[B_2 : E_2 E_1] \sim [B_3 : E_3 E_2 E_1]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_{k-1} \sim I_n$	$I_n = E_k \dots E_3 E_2 E_1 A$	$I_n \sim E_k \dots E_3 E_2 E_1$	$[B_{k-1} : E_{k-1} \dots E_3 E_2 E_1] \sim [I_n : E_k \dots E_3 E_2 E_1]$

นั่นคือ $[A : I_n] \sim [I_n : E_k \dots E_3 E_2 E_1]$ จะได้ว่า $A^{-1} = E_k \dots E_3 E_2 E_1$

ตัวอย่าง 1.4.4 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$[A: I_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.4.4 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n จะได้ว่า

A จะเป็นเมทริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ A สมมูลกับเมทริกซ์ B ซึ่งมีสมาชิกเป็นศูนย์หมดอย่างน้อย 1 แถว

ตัวอย่าง 1.4.5 จงแสดงว่า $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

วิธีทำ

1.5 ระบบสมการเชิงเส้น

1.5.1 ทบทวนระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร 2 สมการ

ให้ l เป็นเส้นตรงในระบบพิกัดฉาก XY และ (x, y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง l เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ x และ y ได้เป็น

$$l: \mathrm{Ax} + \mathrm{By} = \mathrm{C}$$

สำหรับบางค่าคงตัว A, B และ C และจะเรียก $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} = \mathrm{C}$ ว่าสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

ดังนั้นถ้ามีเส้นตรง 2 เส้น ก็สามารถเขียนเป็นสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ได้ 2 สมการ กล่าวคือ

$$l_1: \mathrm{A}_1\mathrm{x} + \mathrm{B}_1\mathrm{y} = \mathrm{C}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A}_1\mathrm{x} + \mathrm{B}_1\mathrm{y} = \mathrm{C}_1 \tag{1}$$

$$l_2: \mathrm{A}_2\mathrm{x} + \mathrm{B}_2\mathrm{y} = \mathrm{C}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A}_2\mathrm{x} + \mathrm{B}_2\mathrm{y} = \mathrm{C}_2 \tag{2}$$

และจะเรียก

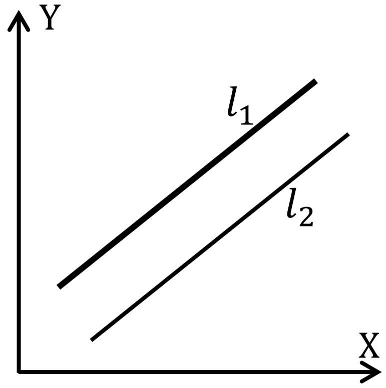
$$\begin{gathered} \mathrm{A}_1\mathrm{x} + \mathrm{B}_1\mathrm{y} = \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{A}_2\mathrm{x} + \mathrm{B}_2\mathrm{y} = \mathrm{C}_2 \end{gathered}$$

ว่าระบบสมการเชิงเส้น (2 ตัวแปร 2 สมการ) และ $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ จะเรียกว่า**ผลเฉลย** (solution) ของระบบสมการเชิงเส้น

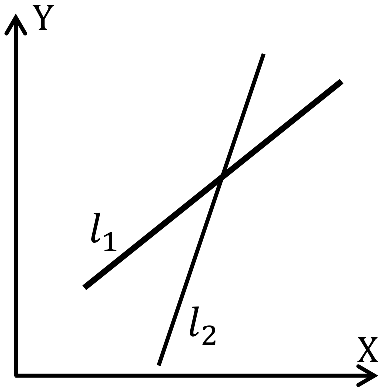
ถ้า

$$A_1x_0 + B_1y_0 = C_1$$
$$A_2x_0 + B_2y_0 = C_2$$

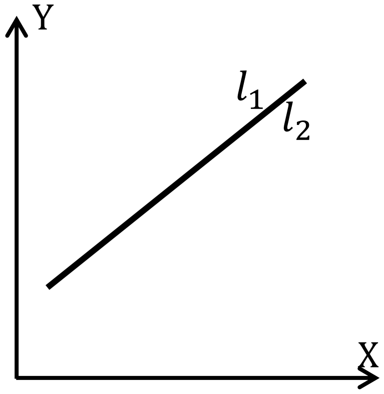
หมายเหตุ เส้นตรงสองเส้นในระนาบสองมิติ จะมีด้วยกันสามลักษณะดังนี้



กรณีที่ 1
เส้นตรง 2 เส้นขนานกันจะไม่เกิดจุดตัด



กรณีที่ 2
เส้นตรง 2 เส้นไม่ขนานกันจะตัดกันที่จุดๆ หนึ่ง



กรณีที่ 3
เส้นตรงทั้งสองเป็นเส้นตรงเดียวกัน

เมื่อเทียบกับระบบสมการจะมีความเป็นไปได้ของผลเฉลยดังนี้

$x - y = 1$ $2x - 2y = 15$	ไม่มี x, y ที่ทำให้สมการทั้งสองเป็นจริง จึงทำให้ระบบสมการไม่มีผลเฉลย
$x - y = 1$ $3x + 2y = 8$	มีเพียง $(2,1)$ ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสอง ดังนั้นระบบสมการมี 1 ผลเฉลย
$x - y = 1$ $2x - 2y = 2$	สำหรับทุกจำนวนจริง t ใดๆ จะได้ว่า $(1 + t,\ t)$ เป็นผลเฉลยของสมการทั้งสอง จึงทำให้ระบบสมการมีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ (infinitely many solutions)

1.5.2 ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร m สมการ

รูปทั่วไปของระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และ n ตัวแปร คือ

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (1)$$

เมื่อ a_{ij} คือ สัมประสิทธิ์ (coefficient) ของระบบสมการ

b_i คือ ค่าคงตัว (constant) และ x_i คือ ตัวไม่ทราบค่า

ถ้าแทนค่า

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$$

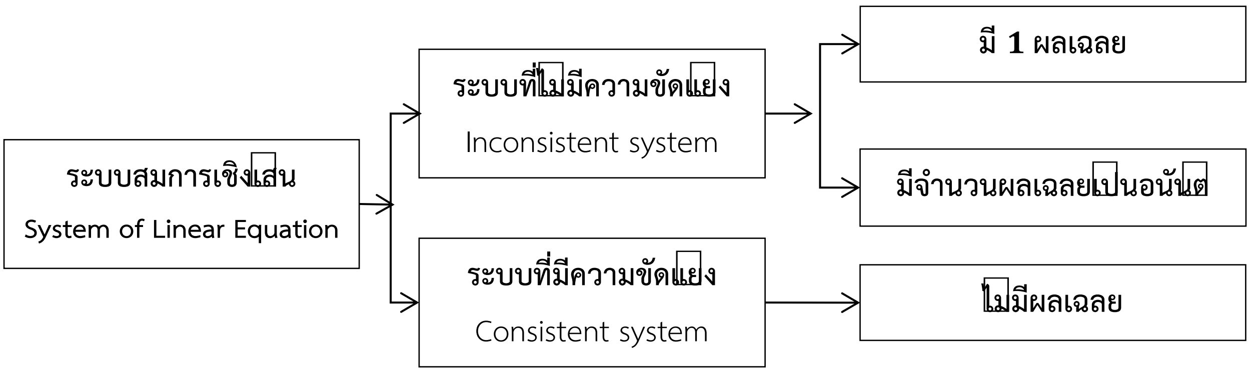
แล้วทำให้ระบบสมการ (1) เป็นจริง แล้วจะเรียก

$$(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

ว่าเป็น**ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น** ซึ่งโดยทั่วไประบบสมการเชิงเส้นอาจจะมีผลเฉลยหรือไม่มีผลเฉลยก็ได้

- ระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่มีผลเฉลยจะเรียกว่า ***ระบบที่มีความขัดแย้ง*** (inconsistent system)
- ระบบสมการเชิงเส้นที่มีผลเฉลยจะเรียกว่า ***ระบบที่ไม่มีความขัดแย้ง*** (consistent system)

หมายเหตุ ระบบที่ไม่มีความขัดแย้ง อาจจะมีผลเฉลยของระบบสมการ 1 ผลเฉลย หรือ มีหลายผลเฉลยก็ได้ ซึ่งจะสรุปได้ดังนี้



1.5.3 ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ (system of homogeneous equations)

ระบบสมการเชิงเส้นที่มีค่าคงตัว $b_i = 0$ ทุกค่า $i = 1,2,3,\cdots$ กล่าวคือ

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \qquad (2)$$

จะเรียกว่า ***ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์*** (homogeneous system of linear equations) และ เรียกระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่เป็นระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ว่า ***ระบบสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์*** (non-homogeneous system of linear equations)

ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธ์เป็นระบบสมการที่ไม่มีความขัดแย้ง เพราะว่ามี $(0,0,0,\ldots,0)$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการอยู่แล้ว กล่าวคือ

$$\begin{array}{rcl} a_{11}0 + a_{12}0 + a_{13}0 + \cdots + a_{1n}0 & = & 0 \\ a_{21}0 + a_{22}0 + a_{23}0 + \cdots + a_{2n}0 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}0 + a_{m2}0 + a_{m3}0 + \cdots + a_{mn}0 & = & 0 \end{array}$$

และจะเรียก $(0,0,0,\cdots,0)$ ว่า ***ผลเฉลยชัด*** (trivial solution)

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น นอกจากจะใช้***วิธีการแทนค่า*** (method of substitution) และ***วิธีกำจัดตัวแปร*** (method of elimination) แล้ว ยังมีวิธีที่ประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในการหาผลเฉลยได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่ระบบสมการมีขนาดใหญ่

จากระบบสมการเชิงเส้นในรูปแบบทั่วไป

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

สามารถเขียนให้เป็นสมการในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$AX = B$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

และจะเรียก A, X และ B ว่า ***เมทริกซ์สัมประสิทธิ์*** **เมทริกซ์ตัวแปร** และ **เมทริกซ์ค่าคงตัว** ตามลำดับ และสามารถเขียนแทนได้ด้วยเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเรียกว่า***เมทริกซ์แต่งเติม*** (augmented matrix)

ตัวอย่าง 1.5.1

(1) จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 5 \\ -4x & + & 6y & = & -2 \end{array}$$

ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม

วิธีทำ

(2) จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & & & + & 2z & = & 4 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & & & & & = & 4 \end{array}$$

ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม

วิธีทำ

1.5.4 การดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์แต่งเติม (Row operations on an augmented matrix)

การดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์แต่งเติมในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่เขียนแทนด้วยเมทริกซ์แต่งเติม โดยที่การดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์จะกระทำแบบใดแบบหนึ่ง ใน 3 แบบต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างแถวที่ i และ j
2. การนำค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์คูณแถวที่ i
3. การนำค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์คูณแถวที่ i แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j โดยที่ $i \neq j$

ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์

1. $R_i \Leftrightarrow R_j$ หมายถึง การสลับที่ระหว่างแถว i และ j
2. $kR_i \Rightarrow R_i$ หมายถึง การนำค่าคงตัว k $(k \neq 0)$ คูณแถว ที่ i
3. $R_j + kR_i \Rightarrow R_j$ หมายถึง การนำค่าคงตัว k คูณแถวที่ i แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j

ตามลำดับ

ตัวอย่าง 1.5.2 **จงเติมตัวเลขลงในช่องว่างให้ถูกต้อง**

(i) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & 0 & -2 & \vdots & 4 \\ 9 & 1 & -4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 4 & 6 & 0 & \vdots & 8 \\ 8 & -2 & -5 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 + 2R_1 \Rightarrow R_2 \\ R_3 + (-1)R_1 \Rightarrow R_3 \end{matrix}$$

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & 0 & -2 & \vdots & 4 \\ 9 & 1 & -4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 9 & 1 & -4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \Leftrightarrow R_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & 0 & -2 & \vdots & 4 \\ 9 & 1 & -4 & \vdots & 5 \\ 2 & 4 & 2 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 1 & -4 & \vdots & 5 \\ 2 & 0 & -2 & \vdots & 4 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ -10 & -20 & -10 & \vdots & -40 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \Leftrightarrow R_3 \\ R_2 + \left(-\frac{1}{2}\right) R_4 \Rightarrow R_2 \\ \\ -5R_4 \Rightarrow R_4 \end{matrix}$$

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้ สามารถหาได้จากระบบสมการที่สมมูลกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5.1 ให้ $AX = B$ และ $CX = D$ เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการและ n ตัวตัวแปร ถ้า $[A \vdots B]$ สมมูลตามแถวกับ $[C \vdots D]$ แล้ว ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ และ $CX = D$ จะมีเซตของผลเฉลยเป็นเซตเดียวกัน

ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ จะดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์แต่งเติมที่ใช้แทนระบบสมการ จนกระทั่งเมทริกซ์อยู่ใน***รูปแบบขั้นบันไดตามแถว*** (row echelon form)

บทนิยาม 1.5.1 เรียกเมทริกซ์ A ว่า**เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว** (row echelon matrix) ถ้า A สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(R1) แถวที่มีสมาชิกเป็นศูนย์หมด (ถ้ามี) จะต้องอยู่ส่วนล่างสุดของเมทริกซ์

(R2) สมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ตัวแรกในแต่ละแถวต้องเป็น 1 เรียกสมาชิก 1 นี้ว่า**สมาชิก 1ตัวแรก(leading 1)**

(R3) สมาชิก 1 ตัวแรกของแต่ละแถวจะปรากฏอยู่ในหลักทางด้านขวาของสมาชิก 1 ตัวแรกในแถวถัดขึ้นไปที่อยู่ติดกัน

ตัวอย่าง 1.5.3 จงพิจารณาเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ ☐ เป็น ☐ ไม่เป็น เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว

เนื่องจาก..

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ ☐ เป็น ☐ ไม่เป็น เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว

เนื่องจาก..

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$ ☐ เป็น ☐ ไม่เป็น เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว

เนื่องจาก..

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ ☐ เป็น ☐ ไม่เป็น เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว

เนื่องจาก...

จากข้อ (1), (2), (3) และ (4) มีข้อใดบ้างที่ไม่อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว และให้ดำเนินการตามแถวให้อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} (1/5)\mathrm{R}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}_3$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{R}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R}_4$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R}_3$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{R}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R}_4$$

ประโยชน์จากการใช้การดำเนินการตามแถว บนเมทริกซ์แต่งเติมที่ใช้แทนระบบสมการเชิงเส้นจนกระทั่งเมทริกซ์อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว คือ

1. กระบวนการหาผลเฉลยจะเป็น**ขั้นตอนวิธี** (algorithm) และสามารถนำมาเขียนโปรแกรมได้
2. กระบวนการหาผลเฉลยสามารถประยุกต์ใช้กับระบบสมการเชิงเส้นที่มีขนาดใหญ่ และสามารถแก้ปัญหากรณีที่จำนวนสมการและตัวแปรที่ไม่เท่ากันได้

ตัวอย่าง 1.5.4 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & & & = & 6 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & - & z & = & 13 \end{array}$$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 : เขียนเมทริกซ์แต่งเติมที่ใช้แทนระบบสมการเชิงเส้น

ขั้นตอนที่ 2 : ดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์แต่งเติม จนกระทั่งเมทริกซ์อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว

ขั้นตอนที่ 3: เปลี่ยนเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูประบบสมการได้ดังนี้

ขั้นตอนในการแก้ระบบสมการที่กล่าวมาในตัวอย่าง 1.5.4 จะเรียกว่า ***ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์*** (Gaussian elimination method)

ตัวอย่าง 1.5.5 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 8 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2 \\ 3x & - & 2y & - & 9z & = & 9 \end{array}$$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 : เขียนเมทริกซ์แต่งเติมที่ใช้แทนระบบสมการเชิงเส้น

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & -2 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 2 : ดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์แต่งเติม จนกระทั่งเมทริกซ์อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถว

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & -2 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 + (-2)R_1 \Rightarrow R_2 \\ R_3 + (-3)R_1 \Rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \end{bmatrix} \qquad R_2 \Leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 0 & 57 & \vdots & 57 \end{bmatrix} \qquad R_3 + (-5)R_2 \Rightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\frac{1}{57}\right)R_2 \Rightarrow R_2$$

ขั้นตอนที่ 3: เปลี่ยนเมทริกซ์แต่งเติมแล้วให้อยู่ในรูประบบสมการได้ดังนี้

จะได้ว่า

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (-1)y & + & z & = & 8 \\ & & y & + & (-12)z & = & -15 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}$$

แทนค่าย้อนกลับ จะได้ $z = 1$ และ

$$y = -15 + 12z = -15 + 12(1) = -3$$
$$x = 8 + y - z = 8 + (-3) - (1) = 4$$

นั่นคือ $(x, y, z) = (4, -3, 1)$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

นอกจากการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์แต่งเติม จนกระทั่งเมทริกซ์อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถวในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นดังตัวอย่างข้างต้นแล้ว ยังสามารถดำเนินการตามแถวเพิ่มเติมได้อีก จนกระทั่งเมทริกซ์อยู่ในรูปแบบที่เรียกว่า ***รูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามแถว*** **(row-reduced echelon form)** ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.5.2 เรียกเมทริกซ์ A ว่า**เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถว** (row-reduced echelon matrix) ถ้า A สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(R1) แถวที่มีสมาชิกเป็นศูนย์หมด (ถ้ามี) จะต้องอยู่ส่วนล่างสุดของเมทริกซ์

(R2) สมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ตัวแรกในแต่ละแถวต้องเป็น 1 เรียกสมาชิก 1 นี้ว่า**สมาชิก 1 ตัวแรก(leading 1)**

(R3) สมาชิก 1 ตัวแรกของแต่ละแถวจะปรากฏอยู่ในหลักทางด้านขวาของสมาชิก 1 ตัวแรกในแถวถัดขึ้นไปที่อยู่ติดกัน

(R4) สมาชิกที่อยู่ในหลักเดียวกันกับสมาชิกที่เป็น 1 ตัวแรกในแต่ละแถวต้องเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 1.5.5 **(ต่อ)**

จากเมทริกซ์ในรูปแบบขั้นบันไดตามแถวในตัวอย่าง 1.5.5 สามารถดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ต่อไปจนกระทั่งเมทริกซ์อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามแถว ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \mathrm{R}_1 + (-1)\mathrm{R}_3 & \Rightarrow & \mathrm{R}_1 \\ \mathrm{R}_2 + (12)\mathrm{R}_3 & \Rightarrow & \mathrm{R}_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{R}_1 + (1)\mathrm{R}_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{R}_1$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= 4 \\ \mathrm{y} &= -3 \\ \mathrm{z} &= 1 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = (4,-3,1)$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

จะเห็นว่า ถ้าดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์แต่งเติม จนกระทั่งเมทริกซ์อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามแถวแล้ว จะได้ค่าของตัวแปรแต่ละตัวเท่ากับค่าคงตัวในหลักทางขวามือตามลำดับ ซึ่งเป็นการลดขั้นตอนการแทนค่าย้อนกลับลงได้

ทฤษฎีบท 1.5.2 ทุกๆ เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบขั้นบันไดลดรูปตามแถว

ตัวอย่าง 1.5.6 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & -3 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ -x & + & 4y & + & 2z & = & 13 \end{array}$$

วิธีทำ

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 2 & 2 & -3 & : & -3 \\ 0 & 1 & -1 & : & -1 \\ -1 & 4 & 2 & : & 13 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.5.7 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & - & y & - & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

วิธีทำ

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 2 & -1 & -1 & : & 3 \\ 1 & 2 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -3 & -3 & : & -9 \\ 0 & 1 & 1 & : & -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 + (-2)R_1 \Rightarrow R_2 \\ R_3 + (-1)R_1 \Rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & 1 & : & -6 \end{bmatrix} \qquad \left(-\frac{1}{3}\right)R_2 \Rightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & : & -9 \end{bmatrix} \qquad R_3 + (-1)R_2 \Rightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(-\frac{1}{9}\right)R_2 \Rightarrow R_2$$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

ระบบสมการมีความขัดแย้ง ดังนั้นระบบสมการไม่มีผลเฉลย

1.5.5 ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์

ตัวอย่าง 1.5.8 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x & - & y & - & z & = & 4 \\ -12x & + & 2y & + & 2z & = & -8 \\ 12x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

วิธีทำ

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & : & 4 \\ -12 & 2 & 2 & : & -8 \\ 12 & 1 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 3 & 3 & : & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 + (2)R_1 \Rightarrow R_2 \\ R_3 + (-2)R_1 \Rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & : & 4 \\ 0 & 3 & 3 & : & -5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 \Leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1/6 & -1/6 & : & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 & : & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \left(\frac{1}{6}\right)R_1 \Rightarrow R_1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)R_2 \Rightarrow R_2 \end{array}$$

จะได้ระบบสมการ

ผลเฉลยในตัวอย่างข้างต้น จะมีตัวแปร t ที่มีค่าเป็นจำนวนจริงใดๆ เรียก ตัวแปรนี้ว่า ***พารามิเตอร์*** (parameter) และเรียกผลเฉลยที่มีตัวพารามิเตอร์ ว่า ***ผลเฉลยบริบูรณ์*** (complete solution) ถ้ากำหนดค่าจำนวนจริงให้กับพารามิเตอร์ในผลเฉลยบริบูรณ์ แล้ว เรียกผลเฉลยนั้นๆว่า ***ผลเฉลยเฉพาะ*** (particular solution) เช่น

ให้ $t = 0$ จะได้ $(x, y, z) = \left(\frac{7}{18}, -\frac{5}{3}, 0\right)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ หรือ

ให้ $t = -\frac{5}{3}$ จะได้ $(x, y, z) = \left(\frac{7}{18}, 0, -\frac{5}{3}\right)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ เป็นต้น

ข้อสังเกต

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ C เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวซึ่งสมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ A จะได้ว่า

- ถ้า $[A: B] \sim [C: D]$ แล้ว โดยทฤษฎีบท 1.5.1 จะได้ว่า

ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ และ $CX = D$ จะมีเซตของผลเฉลยเป็นเซตเดียวกัน

- ระบบสมการนี้มีสมการ m สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า n ตัว
- ถ้าจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์แต่งเติม $[C: D]$ มากกว่าจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ C แล้วระบบสมการ $AX = B$ ไม่มีผลเฉลย
- ถ้าจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์แต่งเติม $[C: D]$ เท่ากับจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ C ซึ่งเท่ากับ r

♥ ถ้า $r = n$ แล้วระบบสมการ $AX = B$ มีผลเฉลยเพียงตัวเดียว

♥ ถ้า $r < n$ แล้วระบบสมการ $AX = B$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์

กล่าวคือ จะมีตัวไม่ทราบค่าของระบบสมการ $AX = B$ จำนวน r ตัว

ซึ่งสามารถเขียนในรูปของตัวไม่ทราบค่าจำนวน $n - r$ ตัวที่เหลือได้

ซึ่งเราจะกำหนดให้ตัวไม่ทราบค่าจำนวน $n - r$ ตัวนี้เป็นพารามิเตอร์ ส่วนตัวไม่ทราบค่าจำนวน r ตัว จะสมนัยกับหลักที่มีสมาชิกนำ 1 ของเมทริกซ์ C

ตัวอย่าง 1.5.9 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.5.10 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

(1) จะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ & & & & x_4 & = & 1 \end{array}$$

ระบบสมการไม่มีความขัดแย้ง มี 3 สมการ และ 4 ตัวแปร ดังนั้นมี $4-3=1$ พารามิเตอร์

แทนค่าย้อนกลับ จะได้ $x_4 = 1$ และ

$$\begin{aligned} x_3 &= 2-2(1)=0 \\ x_1 &= 1-2(0)-(0)=0 \end{aligned}$$

ให้ $x_2 = t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

นั่นคือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, t, 0, 1)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใดๆ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

หรือ เซตของผลเฉลยของระบบสมการคือ $\{(0, t, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

(2) จะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & x_4 & = & 0 \end{array}$$

ระบบสมการไม่มีความขัดแย้ง มี 3 สมการ และ 4 ตัวแปร ดังนั้นมี $4-3=1$ พารามิเตอร์

แทนค่าย้อนกลับ จะได้ $x_4 = 0$ และ

$$\begin{aligned} x_3 &= 0-2(0)=0 \\ x_1 &= 0-2(0)-(1)=0 \end{aligned}$$

ให้ $x_2 = t$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

นั่นคือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, t, 0, 0)$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

หรือ เซตของผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$\{(0, t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{t(0,1,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$$

ตัวอย่าง 1.5.11 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

(1) จะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_4 & = & 0 \end{array}$$

ระบบสมการไม่มีความขัดแย้ง มี 2 สมการ และ 4 ตัวแปร ดังนั้นมี $4-2=2$ พารามิเตอร์

แทนค่าย้อนกลับ จะได้ $x_4 = 0$ และ $x_2 = 0$

ให้ $x_1 = s, x_3 = t$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

นั่นคือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, 0, t, 0)$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

หรือ เซตของผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$\{(s, 0, t, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{s(1,0,0,0) + t(0,0,1,0) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

(2) จะได้ว่า

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

ระบบสมการไม่มีความขัดแย้ง มี 2 สมการ และ 4 ตัวแปร ดังนั้นมี $4-2=2$ พารามิเตอร์

แทนค่าย้อนกลับ จะได้ $x_4 = -x_3$ และ $x_2 = -2x_3$

ให้ $x_1 = s, x_3 = t$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

นั่นคือ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, -2t, t, -t)$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

หรือ เซตของผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$\{(s, -2t, t, -t) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{s(1,0,0,0) + t(0,-2,1,-1) : s, t \in \mathbb{R}\}$$